[redacted]

I.A.1

On a $f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Donc $f(y) - f(z) \geq f(y) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y)$

$\geq f(y) - \lambda f(x) - f(y) + \lambda f(y)$

$\geq \lambda [f(y) - f(x)]$

Or $y - z = y - \lambda x - (1-\lambda) y$

$= y - \lambda x - y + \lambda y$

$= \lambda (y - x)$

Sachant que $x < y$ on a $y - x > 0$ et $y - z > 0$

Donc $\dfrac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \lambda \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Et a fortiori $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$ (a)

$f(z) - f(x) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(x)$

$\leq (1-\lambda) [f(y) - f(x)]$

$z - x = \lambda x + (1-\lambda) y - x = (1-\lambda)(y - x) > 0$ car $\lambda \in]0;1[$

On obtient $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ (b)

En combinant les résultats (a) et (b), on a démontré que :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

IV.1

p est un projecteur si et seulement si $p = p^2$

ssi $-2p + p = -2p + p^2$

ssi $Id - 2p + p = Id - 2p + p^2$

ssi $Id - p = Id^2 - 2p + p^2$

ssi $Id - p = (Id - p)^2$

ssi $Id - p$ est un projecteur

II - 1

Si le père est de génotype AA, on peut dresser le tableau suivant

Génotype de l'enfant	AA	Aa	aa
Probabilité d'être de ce type avec une mère de type AA	r_0^2	0	0
" de type Aa	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 r_0^2$	$\frac{3}{4} r_0 \times \frac{1}{4} s_0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 s_0^2$
" de type aa	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0^2$	$\frac{1}{4} r_0 \times \frac{3}{4} t_0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 t_0^2$

Probabilité que l'enfant soit de type AA $= r_0^2\left(1 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4}\right) = \frac{29}{16} r_0^2$

———————— Aa $= \frac{3}{4} r_0 \frac{1}{4} s_0 + \frac{1}{4} r_0 \frac{3}{4} t_0 = \frac{3}{16}\left(r_0 s_0 + r_0 t_0\right)$

———————— aa $= \left(\frac{1}{4} s_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} t_0\right)^2$

II - 2

On sait que $r_0 + s_0 + t_0 = 1$

On pose alors $r_0 + t_0 = 1 - s_0$

et $d = r_0 - t_0 = 1 - s_0 - 2t_0$

d'où $1 - d = 1 - 1 + s_0 + 2t_0$

donc $1 - d = 2\left(t_0 + \frac{s_0}{2}\right)$

On a également $r_0 + s_0 = 1 - t_0$

et $2r_0 + s_0 = 1 + r_0 - t_0 = 1 + d$

donc $1 + d = 2\left(r_0 + \frac{s_0}{2}\right)$